ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1982

******

MATHEMATIQUES II

(2 pages dactylographiées)

M P' TA

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé positif $R = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; l'espace vectoriel associé est noté E.
A, B, C sont les trois points mobiles par rapport à $\mathcal{E}$ dont les positions à l'instant t sur les point A(t), B(t), C(t) de coordonnées dans R :

$$A(t)\begin{cases} x = 0 \\ y = 5a.\cos t \\ z = 5a.\sin t \end{cases} \qquad B(t)\begin{cases} x = a\,(3\cos t - 4) \\ y = a\,(\cos t - 3) \\ z = 0 \end{cases} \qquad C(t)\begin{cases} x = a\,(3\cos t + 4) \\ y = a\,(\cos t + 3) \\ z = 0 \end{cases}$$

(a est une constante réelle strictement positive ; le temps t décrit $]-\infty, +\infty[$).

P A R T I E 1

1.1. Caractériser les mouvements des points A, B, C.

1.2. Montrer qu'à tout instant t le triangle (A(t), B(t), C(t)) de $\mathcal{E}$ est rectangle isocèle et que les longueurs de ses côtés sont indépendantes du temps. En déduire que A, B, C peuvent être considérés comme trois points d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}'$ en mouvement par rapport à $\mathcal{E}$. Le point de $\mathcal{E}'$ milieu du bipoint (B, C) est noté P.

P A R T I E 2

Dans le mouvement de $\mathcal{E}'$ par rapport à $\mathcal{E}$ on note :

$\Delta(t)$ l'axe central du torseur des vitesses à l'instant t ;

$\overrightarrow{\Omega(t)}$ le vecteur rotation à l'instant t ;

$h(t)\ \overrightarrow{\Omega(t)}$ le vecteur vitesse de glissement à l'instant t.

2.1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(t)}$ et $\overrightarrow{B(t)\,C(t)}$ sont colinéaires.

2.2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega(t)}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E. Calculer h(t).

2.3. Trouver des équations de la droite $\Delta(t)$ dans le repère R et montrer que $\Delta(t)$ se projette orthogonalement sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ selon la droite B(t) C(t).
A quels instants les droites $\Delta(t)$ et B(t) C(t) sont-elles confondues ?
Montrer que, quand t varie, la droite $\Delta(t)$ engendre un cyclindre de révolution Γ de $\mathcal{E}$ dont on donnera le rayon et l'axe ; cet axe sera noté D.

P A R T I E 3

On rapporte $\mathcal{E}'$ au repère $R' = (A ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ défini par :

$\vec{I} = \frac{1}{5a}\overrightarrow{AP}$; $\vec{J} = \frac{1}{10a}\overrightarrow{BC}$; pour tout t : $\overrightarrow{K(t)} = \overrightarrow{I(t)} \wedge \overrightarrow{J(t)}$.

3.1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{I(t)}$, $\overrightarrow{J(t)}$, $\overrightarrow{K(t)}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E.

3.2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega(t)}$, dans la base $(\overrightarrow{I(t)}, \overrightarrow{J(t)}, \overrightarrow{K(t)})$ de E.

.../...

3.3. Soit Δ_t la droite de $\mathcal{E}'$ dont la position dans $\mathcal{E}$ à l'instant t est $\Delta(t)$.
Trouver les équations de Δ_t dans le repère R' et montrer que, quand t varie, Δ_t engendre un cylindre de révolution Γ' de $\mathcal{E}'$ dont on donnera le rayon et l'axe D'.
Montrer, soit géométriquement, soit par le calcul, qu'à tout instant t, la position $\Gamma'(t)$ de Γ' dans $\mathcal{E}$ contient la droite D introduite en 2.3, et que les cylindres Γ et $\Gamma'(t)$ de $\mathcal{E}$ admettent le même plan tangent en tous les points de $\Delta(t)$.

P A R T I E 4

4.1. Que peut-on dire des mouvements (par rapport à $\mathcal{E}$) de deux points distincts M et N de $\mathcal{E}'$ tels que la droite M N soit parallèle à la droite BC ?
En déduire sans calcul qu'il existe une droite de $\mathcal{E}'$ dont chaque point décrit un segment de droite dans $\mathcal{E}$, et une droite de $\mathcal{E}'$ dont chaque point decrit un cercle dans $\mathcal{E}$.

4.2. Calculer les coordonnées dans R de la position M(t) à l'instant t du point M de $\mathcal{E}'$ dont les coordonnées (fixes) dans le repère R' sont (X, Y, Z).
Quand t varie, le point M(t) de $\mathcal{E}$ engendre la trajectoire (L_M) de M dans $\mathcal{E}$.
Justifier :

$$\forall\, t \in]-\infty, +\infty[\qquad \overrightarrow{OM(t)} = \vec{W}_M + \vec{U}_M \cos t + \vec{V}_M \sin t$$

où $\vec{U}_M$, $\vec{V}_M$ et $\vec{W}_M$ sont des vecteurs de E qui dépendent de (X, Y, Z) mais pas de t.

4.3. Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}'$ la trajectoire L_M admet un centre de symétrie Q_M. Quel est la nature du sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué par les points Q_M ?

4.4. Rechercher les points $M \in \mathcal{E}'$ vérifiant l'une des conditions :

i) $\|\vec{U}_M\|$ est minimale ; ii) $\|\vec{V}_M\|$ est minimale.

4.5. Trouver le sous-ensemble de $\mathcal{E}'$ constitué par les points M tels que L_M soit :

a) un segment de droite ; b) un cercle.

FIN pour TA

P A R T I E 5 (M et P' SEULEMENT)

Dans cette dernière partie on considère O comme un point mobile par rapport à $\mathcal{E}'$.

5.1. Calculer les coordonnées de O, à l'instant t, dans le repère R'.

5.2. Montrer que la trajectoire H de O par rapport à $\mathcal{E}'$ est située sur une sphère et construire les projections de H sur les trois plans de coordonnées de R'.

F I N
***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail